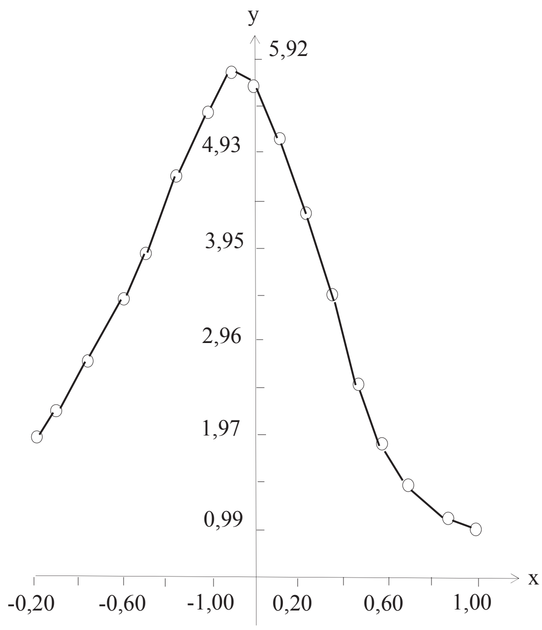

Рисунок 2 – Графическая иллюстрация решения задачи 2.

Предложенные двухточечные граничные задачи были выполнены в приложении MSEXCEL.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / М. Наука. 1974.

2. Холл Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312

3. Соловьева И. Ф. Решение граничных задач с пограничным слоем // Труды БГТУ. Сер. №6 (153), физ.-мат. науки и информ. – 2012. - С. 21–23.

4. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем /пер. с англ. М., 1983. - С. 200.

УДК 517.977.1

В.М. Марченко, проф., д-р физ.-мат. наук;
О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

В докладе рассматриваются гибридные дискретно-непрерывные системы [1], в которые управление входит только в дискретную составляющую, что в совокупности можно квалифицировать как непрерывные системы, управляемые дискретным регулятором.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, описываемый следующей дискретно-непрерывной системой:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh),\ t \in [kh,(k+1)h), \tag{1}$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad k = 0,1,2,... \tag{2}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(kh) \in \mathbb{R}^m$, $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $h > 0$, и $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Начальные условия для системы (1), (2) зададим в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0,\ y(0) = y_0. \tag{3}$$

Определение. При заданном моменте времени $t_1 = qh, q \in \mathbb{N}$, система (1), (2) называется

а) t_1-относительно управляемой, если для любых начальных данных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0,1,..,q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0,1,...,$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = 0$, $y(t_1) = 0$;

б) t_1-относительно управляемой по x, если для любых начальных данных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется такое управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0,1,..,q-1$, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0,1,...,$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = 0$;

в) t_1-относительно управляемой по y, если для любых начальных данных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется такое управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0,1,..,q-1$, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0,1,...,$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $y(t_1) = 0$;

г) t_1-относительно достижимой, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$; $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0,1,..,q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t), t \ge 0$, $y(kh), k = 0,1,...,$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$;

д) t_1-относительно достижимой по x, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$; $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0,1,..,q-1,$ такое, что соответствующее решение $x(t), t \geq 0,$ $y(kh), k = 0,1,...,$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1) = x_1$;

е) t_1-относительно достижимой по y, если для любых векторов $x_0 \in \mathbb{R}^n$; $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $k = 0,1,..,q-1,$ такое, что соответствующее решение $x(t), t \geq 0,$ $y(kh), k = 0,1,...,$ системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $y(t_1) = y_1$.

Задача. Найти параметрические критерии относительной t_1-управляемости и достижимости системы (1), (2).

2. Относительная управляемость. Применяя формулу Коши к системе (1), для решения $x(kh+h), k = 0,1,...,$ получаем представление

$$x(kh+h) = e^{A_{11}(kh+h-kh)}x(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}A_{12}y(kh)d\tau =$$

$$= e^{A_{11}h}x(kh) + \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau\, A_{12}y(kh). \tag{4}$$

Учитывая (2) и вводя обозначения $z[k] = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = \Delta$,

$\Sigma_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau\, A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, для описания $z[k]$ получаем дискретную систему вида

$$z[k+1] = \Sigma_h\, z[k] + \Delta u(kh), k = 0,1,... \tag{5}$$

Отсюда нетрудно видеть, что задача относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2) сводится к задаче полной управляемости (в смысле Калмана) дискретной системы (5). Из (5) с учетом начальных условий (3) получаем

$$z[q] = \Sigma_h\, z[q-1] + \Delta u((q-1)h) =$$

$$= (\Sigma_h)^q \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + (\Sigma_h)^{q-1}\Delta u(0) + (\Sigma_h)^{q-2}\Delta u(h) + ... + \Delta u((q-1)h), \quad q = 1,2,... \tag{6}$$

По аналогии с развитой для линейных динамических систем техникой [2] получения критериев полной управляемости, в частности, используя представление (6), приходим к следующему условию qh-относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2).

Теорема 1. Условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^q] = rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta] \qquad (7)$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной управляемости системы (1), (2).

Действительно, анализируя представление (6), нетрудно заключить, что система (1), (2) qh-относительно управляема тогда и только тогда, когда линейная оболочка столбцов матрицы Σ_h содержится в линейной оболочке столбцов матриц $\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta$, что, в свою очередь, равносильно ранговому условию (7). В качестве следствия теоремы 1 имеем

Теорема 2. Условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^q]) = rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta])$$

является необходимым и достаточным

a) для qh-относительной управляемости по x системы (1), (2) при $H = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}$,

b) для qh-относительной управляемости по y системы (1), (2) при $H = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}$,

где символ I_k обозначает единичную $k \times k$ матрицу.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что свойство qh-относительной управляемости со временем «насыщается». Оказывается, если система (1), (2) не является qh-относительно управляемой при $q = n + m$, то она не будет qh-относительно управляемой и при $q > n + m$.

Замечание 2. Система (1), (2) считается относительно управляемой, если она qh-относительно управляема хотя бы при одном натуральном числе q. Из теоремы 1 вытекает, что необходимый и достаточный критерий относительной управляемости системы (1), (2) заключается в требовании

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta, (\Sigma_h)^{m+n}] = rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta].$$

Аналогично условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta, (\Sigma_h)^{m+n}]) = rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta])$$

является необходимым и достаточным для относительной управляемости по x системы (1), (2) при $H=\left[I_n \quad 0\right]$ и для относительной управляемости по y при $H=\left[0 \quad I_m\right]$.

3. Относительная достижимость. Применяя стандартную технику [2] получения ранговых критериев разрешимости задачи достижимости в линейных стационарных системах, получаем следующие условия t_1-относительной достижимости системы (1), (2).

Теорема 3. Условие $rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta]=n+m$

является необходимым и достаточным для qh-относительной управляемости системы (1), (2) .

Теорема 4. Условие $rank\,(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta])=rank\,H$

является необходимым и достаточным а) для qh-относительной достижимости по x системы (1), (2) при $H=\left[I_n \quad 0\right]$, б) для qh-относительной достижимости по y системы (1), (2) при $H=\left[0 \quad I_m\right]$.

Как и в случае управляемости свойство qh-относительной достижимости со временем «насыщается»: если система (1), (2) не является qh-относительно достижимой при $q=n+m$, то она не будет qh-относительно управляемой и при $q> \ n+m$. Отсюда, вводя понятие относительной достижимости как qh-относительной достижимости хотя бы при одном натуральном числе q, получаем ранговый критерий относительной достижимости: система (1), (2) является относительно достижимой тогда и только тогда, когда выполняется ранговое условие $rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{n+m-1}\Delta]=n+m$.

По аналогии с замечанием 2 можно сформулировать необходимые и достаточные условия относительной достижимости системы (1), (2) по x и по y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко, В.М. Относительная достижимость линейных стационарных систем управляемых дискретным регулятором /В.М Марченко, О.Н. Пыжкова // Труды БГТУ. Сер.VI, Физ.-мат. науки и информ. - 2012– № 6(153). С. 11-13.

2. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р.Габасов, Ф. М.Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.